Atelier « En un coup de ciseaux »

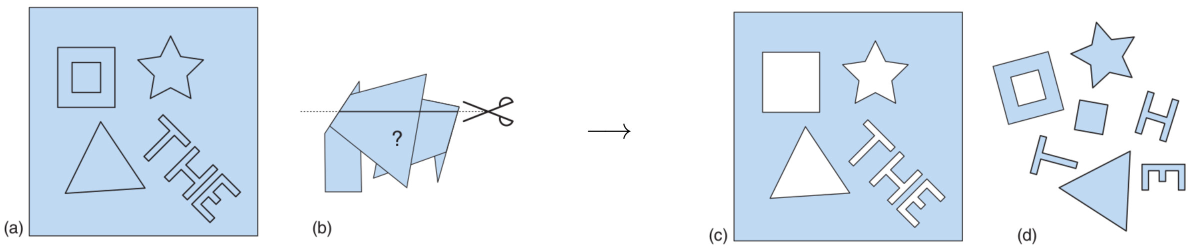
Fiche de synthèse

Cécile Armana
cecile.armana@univ-fcomte.fr
Maîtresse de conférences
Laboratoire de Mathématiques de Besançon et IREM-Franche-Comté
Université de Franche-Comté

1 Nous avons vu...

« **Théorème** ». *Toute figure géométrique plane fermée dont les côtés sont des segments peut être pliée puis découpée en un seul coup de ciseaux rectiligne.*

Ce résultat remarquable s'applique à une gamme très vaste de figures : un polygone (convexe ou non), une réunion de plusieurs polygones, ou encore une réunion de polygones avec des trous polygonaux !

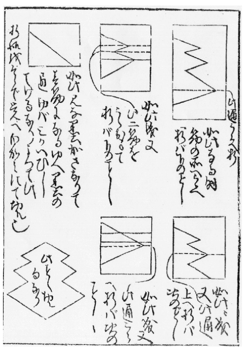


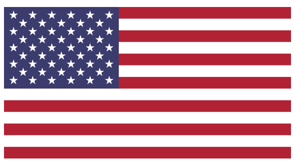
Le problème soulevé est donc de savoir comment plier la feuille selon des plis droits de manière à ramener tous les côtés de la figure sur un seul de ses côtés. Il est connu sous le nom du *problème du coup de ciseaux* (*fold and one cut* ou *fold-and-cut* en anglais).

2 Repères historiques

La plus ancienne référence connue se trouve dans un livre japonais d'énigmes mathématiques, *Wakoku Chiyekurabe*, publié en 1721 par Kan Chu Sen, qui présentait le problème de la découpe d'un rectangle ainsi qu'un pliage correspondant. Pour des extraits de cet ouvrage, voir la page web http://erikdemaine.org/foldcut/sen_book.html.

En 1777 lors de la conception du drapeau américain, George Washington aurait souhaité des étoiles à 6 branches. Betsy Ross, la couturière du premier drapeau, lui aurait suggéré des étoiles à 5 branches car cette forme est facile à obtenir en un coup de ciseaux (?). Elle en aurait fait une démonstration devant le comité qui aurait alors accepté ce modèle. Cette histoire probablement légendaire a été popularisée par le *Harper's New Monthly Magazine* en 1873.





Au XX$^{\text{ème}}$ siècle, plusieurs magiciens ont publié des livres contenant des exemples de problèmes du coup de ciseaux, en particulier Harry Houdini en 1922. S'inspirant de l'un d'entre eux, l'écrivain américain de popularisation mathématique Martin Gardner a publié en 1960 dans le magazine *Scientific American* un article dans lequel il énonce le problème du coup de ciseaux dans sa forme générale et pose la question des figures qu'il est possible de découper ainsi.

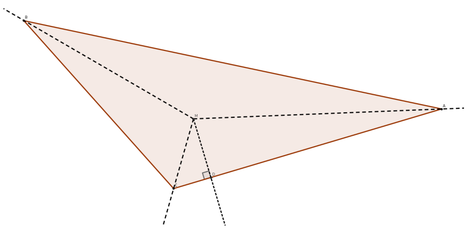
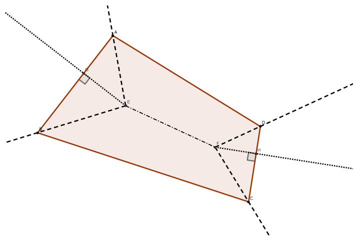
Le théorème est finalement démontré en 1998 par les mathématicien·ne·s-informaticien·ne·s Erik Demaine, Martin Demaine (père d'Erik Demaine) et Anna Lubiw avec une preuve presque complète, complétée en 2001 par Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein, Barry Hayes avec une autre méthode qui permet de traiter les cas restants. Les démonstrations connues sont *constructives* : ce sont des algorithmes qui expliquent comment construire en pratique un tel pliage.

Noter que ce pliage-et-découpage est avant tout théorique : en pratique, il peut être difficile voire impossible de l'exécuter lorsque de nombreux plis se superposent ou que l'épaisseur de papier qui en résulte est trop importante.

3 Notre étude de situations particulières

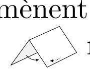
Un polygone étant dessiné sur notre feuille, comment la plier afin de découper le polygone en un coup de ciseaux ? Nous avons étudié le problème pour :

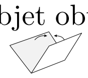
1. *des polygones réguliers* : carré, triangle équilatéral, hexagone régulier ; étoile régulière à cinq branches → plis selon les **axes de symétrie**.
2. *des polygones semi-réguliers* : triangle isocèle, rectangle.
   → plis selon les **bissectrices** d'angles formés par deux côtés adjacents du polygone initial.
3. *des polygones non réguliers* :
   (a) triangle quelconque : pli selon la **perpendiculaire** à un côté issue du point d'intersection des bissectrices.
   (b) quadrilatère quelconque : pli selon la **bissectrice** de l'angle formé par deux côtés opposés.

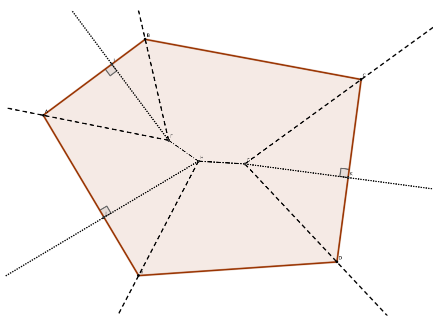
Quel est le rôle de chacun de ces plis ?

— selon les *axes de symétrie* s'ils existent : ils diminuent le nombre total de plis ;

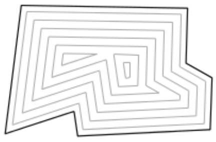
— selon les *bissectrices* (de deux côtés adjacents ou de deux côtés opposés) : ils ramènent tous les côtés du polygone sur un seul côté ; en origami ce sont des plis « montagne »  notés − · − · − ;

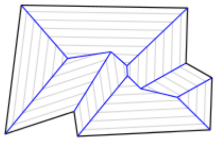
— selon les *perpendiculaires* : ils aplatissent l'objet obtenu à l'aide des seuls plis selon les bissectrices ; en origami ce sont des plis « vallée »  notés − − −.

Nous disposons ainsi des plis fondamentaux pour plier puis découper presque n'importe quel polygone convexe ou réunion de polygones convexes.



4 Généralisation : squelettes et couloirs





Les ingrédients vus précédemment constituent le fondement de la démonstration de Demaine, Demaine, et Lubiw (1998).

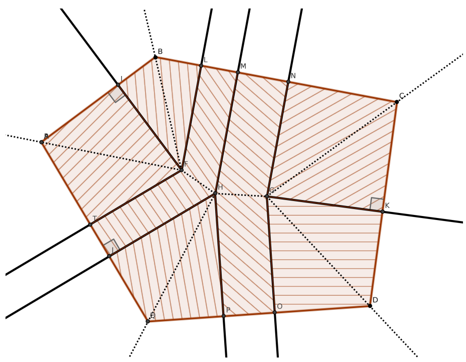
Les plis effectués selon les *bissectrices* forment le **squelette** du polygone (*straight skeleton* en anglais).

Le squelette est aussi décrit par le procédé suivant : on rétrécit au fur et à mesure le polygone en gardant les côtés parallèles lors du déplacement et en les déplacant à vitesse constante. Le squelette est alors le trajet décrit par les sommets du polygone initial.

Ces squelettes étaient connus depuis le XIX^{e} siècle en architecture pour construire des toits dont tous les pans ont la même pente. Ils sont aussi étudiés en géométrie et informatique théorique depuis une trentaine d'années.

Les plis selon les *perpendiculaires* aux côtés, quant à eux, découpent le polygone selon des zones ou des bandes, appelées **couloirs**, qui correspondent chacun ici à une « ailette ».

Le squelette permet de ramener les côtés les uns sur les autres, tandis que les couloirs permettent d'obtenir un objet plié plat. Plus précisément Demaine, Demaine et Lubiw démontrent que chaque couloir peut être plié en un accordéon dont les bords sont parallèles entre eux et perpendiculaires au côté du polygone. En utilisant la **théorie des graphes**, ils démontrent que les différents couloirs peuvent ensuite être pliés tous ensemble à plat, ce qui fournit un pliage convenable de l'ensemble de la figure.



Toutefois cette méthode ne permet pas de traiter certaines configurations dans lesquelles les plis perpendiculaires forment une spirale infinie. Dans ce cas, la méthode par empilement de disques proposée par Bern, Demaine, Eppstein, et Hayes en 2002 permet d'y remédier mais elle est moins intuitive.

5 Des ressources

Sur le problème du coup de ciseaux en général

— *The Fold-and-cut problem*, `http://erikdemaine.org/foldcut/`.
Page web maintenue par Erik Demaine. Riche en contenu : articles originaux, patrons à plier et découper, notamment le cygne et sa solution.

— *How To Fold It : The Mathematics of Linkages, Origami and Polyhedra*, Joseph O'Rourke (Cambridge University Press, 2011).
Livre en anglais sur les mathématiques des liaisons mécaniques, des origamis, du pliage et des polyèdres. Se veut accessible avec un bon bagage de mathématiques du lycée. Le chapitre 5 est dédié au problème du coup de ciseaux.
Le site `http://www.howtofoldit.org/` complète le livre par des ressources, notamment des patrons à découper.

— *Geometric Folding Algorithms – Linkages, Origami, Polyhedra*, Erik Demaine et Joseph O'Rourke (Cambridge University Press, 2007).
Livre en anglais sur les mêmes thèmes que le précédent mais plus spécialisé et technique et

destiné à un public de spécialistes. Le chapitre 17 est dédié au problème du coup de ciseaux, avec un passage en revue des deux méthodes de démonstration.

— *Designing Roofs of Buildings*, `https://web.archive.org/web/20190510024237/http://www.sable.mcgill.ca/~dbelan2/roofs/roofs.html`
Page web archivée de l'informaticien David Bélanger sur l'utilisation des squelettes dans la conception des toits en architecture.

Des vidéos de pliages

— *Fold & Cut : the Swan*, `https://www.youtube.com/watch?v=k4zE0YBz7yI`
Vidéo de Dries Devos présentant le pliage et le découpage du cygne.

— *Fold and Cut Theorem - Numberphile*, `https://www.youtube.com/watch?v=ZREp1mAPKTM`
Vidéo de Katie Steckles présentant le découpage de chaque lettre de l'alphabet.

Des pistes pour des réinvestissements en classe

— *Formes mathématiques, en un seul coup de ciseaux !* par Isabelle Dubois
`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03190856/document`
Article de présentation pour la revue de vulgarisation *Découverte* du Palais de la Découverte, n°387, 2013.

— *En un coup de ciseaux : sur un article d'Erik Demaine*, par Shaula Fiorelli (Université de Genève, février 2010)
`https://www.unige.ch/semainedesmaths/files/3115/0356/7014/EP_5P-7P-Coup_de_ciseau_1-plus-polyreg.pdf`
Diaporama de présentation générale avec illustration de pliages sur des polygones élémentaires.

— *Le coup de ciseaux*, `http://www.unige.ch/~fiorelli/MeJ/Coup-ciseaux.pdf`
Compte-rendu d'un atelier MATh.en.JEANS animé par Shaula Fiorelli à la cité scolaire Roger Frison Roche Chamonix en 2006-2007.

— *En un coup de ciseaux*, `https://www.unige.ch/semainedesmaths/semaine-des-maths-2010/tableau-recapitulatif/`
Ateliers pour élèves conçus par Shaula Fiorelli dans le cadre de la Quatrième Semaine suisse des Mathématiques en 2010. Décliné en trois niveaux, approximativement :
  — primaire : `https://www.unige.ch/semainedesmaths/semaine-des-maths-2010/activites-pour-le-cycle-2-5p-8p/dans-un-nuage-21-2-2-2/`
  — collège : `https://www.unige.ch/semainedesmaths/semaine-des-maths-2010/activites-pour-le-cycle-2-5p-8p/dans-un-nuage-21-2-2-2-2/`
  — lycée : `https://www.unige.ch/semainedesmaths/semaine-des-maths-2010/activites-pour-le-cycle-3/dans-un-nuage-21-2-2-2-2/`
avec pour chacun, une fiche enseignant et une fiche élève.

— *Straight-cut Origami* (en anglais), chapitre 2 du livre électronique *Discovering the Art of Mathematics – Art & Sculpture*, disponible à l'adresse `http://artofmathematics.org/books/art-and-sculpture`
Progression et de nombreuses questions à se poser, ou à poser aux élèves, pour organiser une séquence en classe.